

Nguyễn Thị Bạch Kim

Giáo trình

**Các Phương pháp Tối ưu
Lý thuyết và Thuật toán**

NHÀ XUẤT BẢN BÁCH KHOA – HÀ NỘI

Mục lục

Đời mở đầu	VII
Một số khái niệm và kết quả cơ bản từ giải tích lồi	1
1.1 Không gian Euclid \mathbb{R}^n	1
1.1.1 Điểm hay véc tơ trong \mathbb{R}^n	1
1.1.2 Véc tơ độc lập tuyến tính	2
1.1.3 Cơ sở	3
1.1.4 Tích vô hướng	3
1.1.5 Chuẩn Euclid của véc tơ	4
1.1.6 Bất đẳng thức Cauchy-Bunjakowski-Schwarz	4
1.1.7 Góc giữa hai véc tơ	5
1.1.8 Sự hội tụ	5
1.1.9 Tập đóng, tập mở, tập compac	5
1.1.10 Thứ tự	6
1.2 Hàm nhiều biến	6
1.2.1 Định nghĩa	6
1.2.2 Tính liên tục	8
1.2.3 Đạo hàm riêng	8
1.2.4 Gradient và ma trận Hesse	9
1.2.5 Tính khả vi	10
1.2.6 Khả vi hai lần	12
1.2.7 Khai triển Taylor	12
1.2.8 Đạo hàm hàm hợp	13
1.2.9 Đạo hàm theo hướng	14
1.2.10 Hàm tuyến tính, hàm afin	15
1.3 Tập lồi	16
1.3.1 Tập afin	16
1.3.2 Số chiều và điểm trong tương đối	17
1.3.3 Tập lồi và điểm cực biên	17
1.3.4 Siêu phẳng, nửa không gian	20
1.3.5 Nón	22
1.3.6 Phương lồi xa, phương cực biên	23

1.3.7	Các định lý tách tập lồi	2
1.3.8	Tập lồi đa diện	2
1.3.9	Đơn hình	2
1.4	Hàm lồi	2
1.4.1	Định nghĩa	2
1.4.2	Các phép toán về hàm lồi	3
1.4.3	Tính liên tục của hàm lồi	3
1.4.4	Đạo hàm theo hướng của hàm lồi	3
1.4.5	Tiêu chuẩn nhận biết hàm lồi khả vi	3
2	Bài toán tối ưu	3
2.1	Một số ví dụ	3
2.2	Bài toán tối ưu và các khái niệm cơ bản	5
2.3	Các loại bài toán tối ưu	5
2.4	Điều kiện tồn tại nghiệm	5
3	Quy hoạch tuyến tính	6
3.1	Định nghĩa quy hoạch tuyến tính	6
3.1.1	Dạng chuẩn tắc	6
3.1.2	Dạng chính tắc	6
3.1.3	Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính bất kỳ về dạng chuẩn tắc hay chính tắc	6
3.2	Sự tồn tại nghiệm và tính chất tập nghiệm của quy hoạch tuyến tính	6
3.2.1	Sự tồn tại nghiệm	6
3.2.2	Tính chất tập nghiệm	7
3.3	Giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến bằng phương pháp hình học	7
3.4	Phương pháp đơn hình giải quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc	7
3.4.1	Mô tả hình học của phương pháp đơn hình	7
3.4.2	Cơ sở lý thuyết của phương pháp đơn hình	7
3.4.3	Thuật toán đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc	8
3.4.4	Công thức đối cơ sở và thuật toán đơn hình dạng bảng	9
3.5	Tìm phương án cực biên xuất phát và cơ sở xuất phát	10
3.5.1	Trường hợp bài toán có dạng chuẩn tắc	10
3.5.2	Trường hợp bài toán có dạng chính tắc	10
3.5.3	Phương pháp đánh thuế hay phương pháp bài toán (M)	11
3.6	Tính hữu hạn của thuật toán đơn hình	11
3.7	Hiện tượng xoay vòng	11
3.8	Đối ngẫu	11
3.8.1	Cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu	11
3.8.2	Các định lý về đối ngẫu	12
3.8.3	Định lý về độ lệch bù	12
3.8.4	Một số ứng dụng của lý thuyết đối ngẫu	12

Bài toán vận tải	135
4.1 Bài toán vận tải	135
4.1.1 Mô hình toán học	135
4.1.2 Sự tồn tại phương án tối ưu	140
4.2 Bảng vận tải, chu trình	141
4.2.1 Bảng vận tải	141
4.2.2 Chu trình	142
4.3 Phương pháp thế vị giải bài toán vận tải	146
4.3.1 Cơ sở lý thuyết	147
4.3.2 Thuật toán thế vị	151
4.4 Tìm phương án xuất phát cho bài toán vận tải	157
4.4.1 Phương pháp góc tây bắc (northwest - conner rule)	157
4.4.2 Phương pháp cực tiểu chi phí (The least-cost method)	159
4.5 Các bài toán vận tải mở rộng	163
4.5.1 Bài toán không cân bằng thu phát	163
4.5.2 Bài toán vận tải với ràng buộc bất đẳng thức	168
4.5.3 Bài toán lập kho nhận hàng	170
4.5.4 Bài toán vận tải có ô cấm	173
4.5.5 Bài toán vận tải dạng max	176
4.5.6 Bài toán phân việc (The personnel-assignment problem)	178
Quy hoạch nguyên	183
5.1 Mô hình toán học	183
5.2 Một số ví dụ	185
5.3 Ý tưởng của phương pháp nhánh cận	189
5.3.1 Một số khái niệm cơ bản	189
5.3.2 Ý tưởng của phương pháp nhánh cận	190
5.4 Thuật toán nhánh cận Land - Doig giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên hoàn toàn	191
5.4.1 Tính cận trên	191
5.4.2 Chia nhánh	192
5.4.3 Thuật toán	192
5.4.4 Ví dụ	194
5.5 Thuật toán nhánh cận giải bài toán ba lô 0 – 1	204
5.5.1 Công thức tính cận trên của bài toán ba lô (KP)	204
5.5.2 Tính cận trên của bài toán con	207
5.5.3 Thuật toán	209
5.5.4 Ví dụ	213
Quy hoạch phi tuyến	221
6.1 Bài toán quy hoạch phi tuyến không ràng buộc	221
6.1.1 Điều kiện tối ưu	221

6.1.2	Phương pháp hướng giảm	22
6.1.3	Phương pháp gradient	23
6.1.4	Phương pháp Newton	23
6.1.5	Cực tiểu hàm một biến	24
6.1.6	Phương pháp tìm kiếm trực tiếp	25
6.2	Bài toán quy hoạch phi tuyến có ràng buộc	25
6.2.1	Điều kiện tối ưu	25
6.2.2	Phương pháp nhân tử Lagrange	26
6.2.3	Phương pháp tuyến tính hóa giải quy hoạch lồi	27
6.2.4	Phương pháp hướng có thể giải bài toán cực tiểu hàm trơn với ràng buộc tuyến tính	27
6.2.5	Phương pháp Frank-Wolfe giải bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc tuyến tính	28
6.2.6	Phương pháp hàm phạt	28

Tài liệu tham khảo

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

\mathbb{R}	tập số thực
\mathbb{R}^n	không gian Euclid n chiều
$x \in D$	x thuộc tập D
$x \notin D$	x không thuộc tập D
\emptyset	tập rỗng
$C \setminus D$	hiệu của tập C và D
$C \cup D$	hợp của tập C và tập D
$C \cap D$	giao của tập C và tập D
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của x và y
$\ x\ $	chuẩn Euclid của x
$ x $	giá trị tuyệt đối của x
$\text{aff} E$	bao afin của tập E
$\text{conv} E$	bao lồi của tập E
$\text{dim} E$	thứ nguyên (hoặc số chiều) của tập E
$ X $	số phần tử của tập X
$[x^1, x^2]$	đoạn nối hai điểm x^1 và x^2
$\text{int} X$	phần trong của tập X
$\text{ri} X$	phần trong tương đối của tập X
$\text{rec} X$	non lồi xa của tập X
$\text{cone}\{v^1, \dots, v^k\}$	nón sinh bởi các véc tơ v^1, \dots, v^k
$T(X, x^*)$	nón tiếp xúc với tập X tại điểm x^*
$F(X, x^*)$	tập các hướng chấp nhận được của tập X tại x^*
$\text{dom} f$	miền xác định hữu hiệu của f
$\text{epi}(f)$	epigraph của hàm f
$\text{hypo}(f)$	hypograph của hàm f
$f'(x^0, d)$	đạo hàm theo hướng của hàm f theo hướng d tại x^0
$\nabla f(x)$	véc tơ gradient của hàm f tại điểm x
$\nabla^2 f(x)$	ma trận Hesse của hàm f tại điểm x
f'_{x_i}	đạo hàm riêng của f theo biến x_i

A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
A^{-1}	ma trận nghịch đảo của ma trận khả nghịch A
I_m	ma trận đơn vị cấp m
$\text{rank} A$	hạng của ma trận A
\mathbb{L}	hàm Lagrange
v.đ.k.	viết tắt của cụm từ "với điều kiện"
t.ư.	viết tắt của chữ "tương ứng"

Lời mở đầu

"Vì thế giới được thiết lập một cách hoàn hảo
và vì nó là sản phẩm của đấng sáng tạo tinh thông
nên không thể tìm thấy một cái gì mà không mang tính chất cực đại hay cực tiểu nào đó."

Leonhard Euler

Có nhiều tình huống trong xã hội, từ cuộc sống đời thường đến các hoạt động kinh tế, kỹ thuật, công nghệ và quản lý hiện đại... người ta phải quan tâm tới bài toán tìm a phương án tốt nhất để đạt mục tiêu mong muốn trong những điều kiện ràng buộc nhất định. Đó là các *bài toán tối ưu*. Chính những nỗ lực nhằm giải các bài toán tối ưu đã góp phần kích thích sự phát triển của Giải tích Toán học thế kỷ XVII - XVIII với sự đóng góp to lớn của những nhà toán học lỗi lạc của mọi thời đại: Fermat¹, Leibniz², Euler³... Tuy nhiên, phải đến những năm 30, 40 của thế kỷ XX, Quy hoạch toán học (Mathematical Programming) hay còn gọi là Toán Tối ưu (Optimization) mới hình thành với tư cách là một lý thuyết độc lập với nhiều hướng nghiên cứu khác nhau: đầu tiên là Quy hoạch tuyến tính (Linear Programming), tiếp đó là Quy hoạch lồi (Convex Programming), Quy hoạch toàn cục (Global Programming), Lý thuyết điều khiển Tối ưu (Optimization Control).

Ngày nay, với sự trợ giúp của cuộc cách mạng công nghệ thông tin, quy hoạch toán học ngày càng phát triển mạnh mẽ. Các phương pháp tối ưu đã được ứng dụng rộng rãi trong mọi lĩnh vực khoa học, kỹ thuật, công nghệ, quản lý, kinh tế, khai thác dữ liệu (data mining), viễn thông, v.v. .

Giáo trình này trình bày các phương pháp tối ưu tiêu biểu và có nhiều ứng dụng để giải quyết các bài toán nảy sinh trong thực tế. Để nắm được nội dung của giáo trình người đọc chỉ cần có những kiến thức cơ bản của đại số tuyến tính và giải tích vi phân. Giáo trình gồm sáu chương. Chương 1 trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản của giải tích lồi cần dùng đến trong các chương sau. Mô hình toán học

¹Pierre De FERMAT (1601 - 1665): Nhà toán học Pháp. Ông nổi tiếng về những định lý số học (không có chứng minh) được ông ghi bên lề một cuốn sách. Định lý lớn của Fermat "*Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên khi $n > 2$* " mới được chứng minh năm 1995 bởi nhà toán học Anh Andrew Wiles.

²Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 - 1716): Nhà toán học Đức. Cùng với Newton, ông được coi là cha đẻ của phép tính vi phân và tích phân.

³Leonhard EULER (1707 - 1783): Nhà toán học và vật lý học người Thụy Sĩ. Ông là nhà toán học có nhiều đóng góp nhất trong lịch sử. Nhà toán học thiên tài người Đức Gauss (1777 - 1855) nói rằng: "Nghiên cứu các công trình của Euler là trường học tốt nhất về những lĩnh vực khác nhau của toán học mà không gì có thể thay thế được".

của bài toán tối ưu và điều kiện tồn tại nghiệm được trình bày ở Chương 2. Chương 3 trình bày Quy hoạch tuyến tính. Một trường hợp đặc biệt của quy hoạch tuyến tính nhưng được ứng dụng rất nhiều là Bài toán vận tải được trình bày ở Chương 4. Chương 5 dành cho Quy hoạch nguyên. Các phương pháp giải bài toán quy hoạch phi tuyến được đề cập ở Chương 6. Phần cuối của cuốn sách là Danh mục từ khóa, trong đó tên các khái niệm được sắp xếp theo thứ tự chữ cái đầu kèm theo trang cần tìm. Một số ký hiệu và chữ viết tắt được đặt ngay sau Mục lục.

Giáo trình được biên soạn theo chương trình môn học "Các phương pháp tối ưu", với thời lượng là 6 đơn vị học trình, do Bộ môn Toán ứng dụng xây dựng và đã được Hội đồng Khoa học của Khoa Toán Tin ứng dụng, Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội thông qua. Tác giả trân trọng cảm ơn Ban Chủ nhiệm Khoa Toán Tin ứng dụng đã luôn tạo điều kiện thuận lợi, động viên, khích lệ để giáo trình này được hoàn thành.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, GS. TSKH. Đỗ Hồng Tân và GS. TS. Trần Vũ Thiệu đã dành không ít thời gian để đọc bản thảo và cho nhiều ý kiến quý báu về nội dung cuốn sách. Chân thành cảm ơn các em sinh viên Nguyễn Xuân Quang (K42), Tăng Thị Hà Yên (K46, lớp KSTN), Nguyễn Thị Hà (K46), Nguyễn Thị Lê Trang, Đặng Đình Công (K48, lớp KSTN), Nguyễn Thùy Linh (K48), Nguyễn Thị Mai Thương (K49), giảng viên Tạ Anh Sơn, Nguyễn Quang Thuận và Lê Quang Thủy (Khoa Toán Tin ứng dụng) đã giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình soạn thảo.

Giáo trình này chắc chắn còn nhiều thiếu sót. Tác giả mong rằng sẽ nhận được những góp ý của các đồng nghiệp và học viên, sinh viên nhằm làm cho việc trình bày nội dung cuốn sách tốt hơn. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ: Nguyễn Thị Bạch Kim, Khoa Toán Tin ứng dụng, Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, số 1, đường Đại Cồ Việt, Hà Nội. Xin trân trọng cảm ơn.

Hà Nội, tháng 3 năm 2008
Nguyễn Thị Bạch Kim